

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.

ЛЕКЦИЯ 8

5 МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

5.1 Исходные положения метода гармонической линеаризации

Ранее мы рассматривали переходные процессы и автоколебания в нелинейных системах второго порядка. Этот материал важен для выявления особенностей поведения нелинейных систем. Однако при решении практических задач часто аппроксимации второго порядка недостаточно. В связи с этим нашли применение методы, пригодные для систем высокого порядка. Наиболее распространенным из них является метод гармонической линеаризации, иначе он называется методом гармонического баланса. В англоязычных странах он называется методом описывающих функций. Метод гармонической линеаризации является приближенным методом, но зато он, как уже говорилось, пригоден для систем высокого порядка.

Идея метода состоит в следующем. Объекты управления, как правило, обладают свойствами фильтра низких частот. Этот фильтр пропускает частоты от нуля до некоторого значения (до частоты среза). При превышении частоты входного сигнала частоты среза коэффициент передачи фильтра резко падает, поэтому можно считать, что этот фильтр более высоких частот не пропускает. Тогда, если подать на такой фильтр периодический сигнал произвольной формы, то фильтр не пропустит высокие гармонические составляющие, и на выходе этого фильтра уже будет сглаженный сигнал, приближающийся к синусоиде.

Тогда на вход объекта управления, являющегося фильтром низких частот, можно вместо периодического сигнала произвольной формы подавать первую гармонику этого сигнала. На выходе объекта в том и другом случае сигналы будут почти одинаковые. На этом основан метод гармонической линеаризации.

Таким образом, *метод гармонической линеаризации основан на свойстве объекта управления не пропускать высшие гармонические составляющие входного сигнала.*

Что нам дает такое рассмотрение? Оно позволяет представить нелинейный элемент линейным звеном. Действительно, мы считаем, что на вход нелинейного звена подается синусоида с выхода объекта, на основании предыдущих рассуждений можно принять, что на его выходе также будет синусоида, а это – признаки линейного звена. В чем же тогда будет проявляться его нелинейность? Ответ простой – в нелинейной зависимости амплитуды выходной синусоиды от амплитуды входной, то есть в нелинейной зависимости коэффициента передачи нелинейного звена.

Таким образом, *в методе гармонической линеаризации нелинейный элемент приближенно заменяется линейным звеном, коэффициента передачи которого нелинейно зависит от амплитуды синусоиды входного сигнала.*

Из предыдущего изложения следует, что метод гармонической линеаризации позволяет исследовать периодические колебания, возникающие в нелинейной системе. Итак: *метод гармонической линеаризации позволяет выявить условия возникновения периодических колебаний в динамической системе, определить параметры установившихся колебаний и их устойчивость.*

Рассмотрим основы построения этого метода. Представим схему замкнутой системы управления состоящей из нелинейного звена и линейной части (Рисунок 5.1)

Примем, как и ранее, что задание равно нулю, то есть $u_3 = 0$. Случай ненулевого задания также может быть рассмотрен методом гармонической линеаризации, это – для самостоятельного изучения.

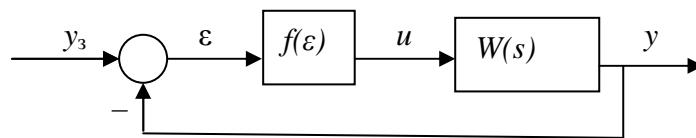


Рисунок 5.1 – Типовая структурная схема нелинейной САР. Здесь $f(\varepsilon)$ – характеристика нелинейного элемента, то есть $u = f(\varepsilon)$, $W(s)$ – передаточная функция линейной части.

Допустим, что в системе возникает периодический режим с угловой частотой ω , соответствующей периоду $T = 2\pi/\omega$ (частота здесь и далее – в радиан/с, или, что то же самое 1/с). Тогда на выходе линейного звена, по нашему предположению, возникает гармонический сигнал. Этот сигнал по цепи обратной связи поступает на вход нелинейного элемента. Допустим, что этот сигнал имеет вид

$$\varepsilon(t) = a \sin \omega t, \quad (5.1)$$

где a – амплитуда синусоиды на входе нелинейного элемента. Тогда на выходе нелинейного элемента (НЭ) возникает периодическая функция времени $u(t)$ (рисунок 5.1). Но нас интересует только первая гармоника этой функции. Когда говорят о гармониках, или о гармонических составляющих, то имеют в виду разложение периодической функции в ряд Фурье. Ряд Фурье для $u(t)$ будет иметь вид

$$u(t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad (5.2)$$

где

$$A_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(a \sin \omega t) dt, \quad (5.3)$$

$$A_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(a \sin \omega t) \cos n\omega t dt, \quad (5.4)$$

$$B_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(a \sin \omega t) \sin n\omega t dt, \quad (5.5)$$

где ω – частота входного сигнала, 1/сек. Отметим, что, согласно (5.3)...(5.5) A_0 , A_n и B_n зависят от амплитуды сигнала на входе нелинейного элемента a .

Нам удобнее работать с частотой, хотя в формулах (5.2 – 5.5) может фигурировать и период $T = 2\pi/\omega$.

Сигналы на входе и выходе релейного элемента можно построить графически. Для примера рассмотрим такое построение (рисунок 5.2).

Такое построение наглядно и позволяет избежать ошибок при вычислениях.

Порядок построения следующий:

1) Изображаем характеристику релейного элемента.

2) По оси абсцисс релейного элемента отложен входной сигнал. Это у нас синусоида. Изобразим эту синусоиду во времени, для удобства графических построений ось времени

откладываем вниз, а ось входного сигнала параллельно оси этого сигнала релейного элемента, мы как бы повторяем эту ось со смещением.

3) Аналогично изображаем во времени выходной сигнал, для этого также ось времени откладываем вправо, а ось выходного сигнала соответствует со смещением этому сигналу релейного элемента.

В результате мы получаем график во времени выходного сигнала. По нему можно наметить интервалы интегрирования по формулам (5.3) – (5.5) и характер выходного сигнала на каждом интервале времени.

Вернемся к нашим формулам. Нас интересует первая гармоника выходного сигнала нелинейного элемента. Запишем выражение для этой гармоники

$$u(t) \approx \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t, \quad (5.6)$$

Напомним, что мы отбрасываем высшие гармоники в (5.6) не потому, что они малы в сигнале управления, а потому, что они будут малы на выходе динамического линейного звена.

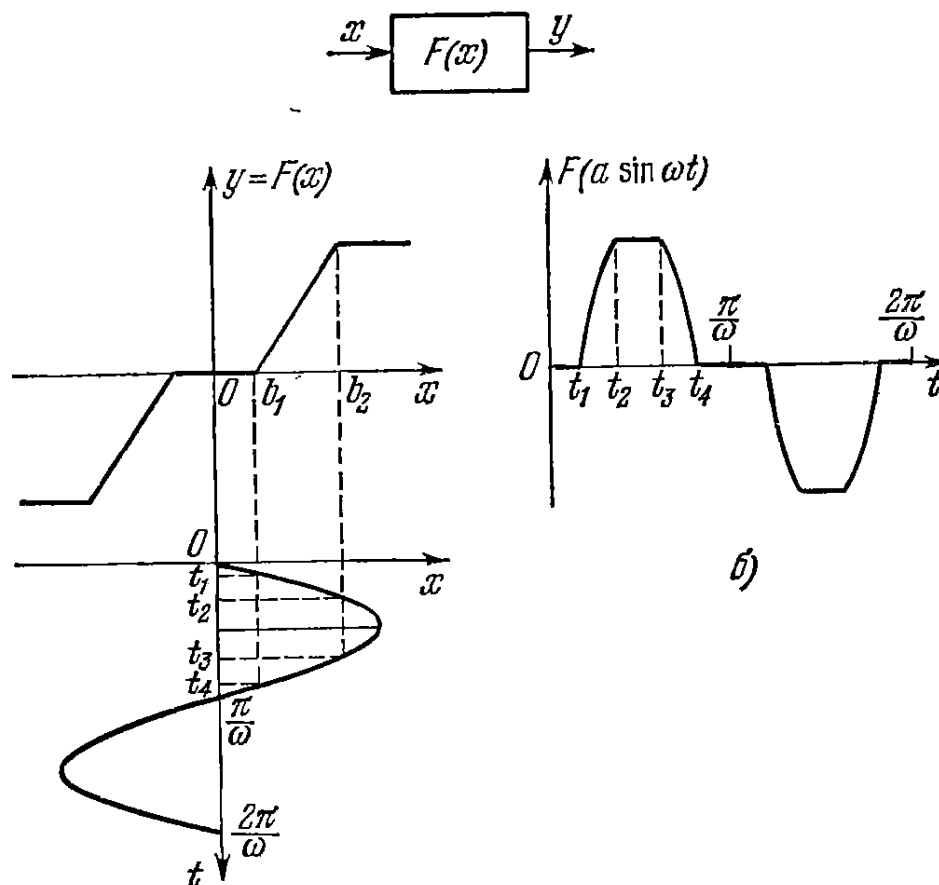


Рисунок 5.2 – Построение входных и выходных сигналов релейного элемента

Рассмотрим случай, когда нелинейный элемент симметричный, например, это релейный элемент с одинаковыми значениями положительного и отрицательного выходного сигнала (рисунок 5.2). Тогда в (5.6) $A_0 = 0$. Кроме того, для выводов обозначим

$$q(a) = \frac{B_1}{a};$$

$$q'(a) = \frac{A_1}{a},$$
(5.7)

поскольку в (5.6) A_1 и B_1 зависят от a .

Выражения для q и q' , согласно формулам (5.4), (5.5), (5.7) имеют вид:

$$q(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi/\omega} f(a \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t) ,$$
(5.8)

$$q'(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi/\omega} f(a \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t) ,$$
(5.9)

Из (5.7) имеем

$$B_1 = q(a)a;$$

$$A_1 = q'(a)a.$$
(5.10)

Подставляя (5.10) в (5.6) при $A_0 = 0$, получаем

$$u(t) \approx q(a)a \sin \omega t + q'(a)a \cos \omega t .$$
(5.11)

Принимая во внимание, что $\frac{d \sin \omega t}{dt} = \omega \cos \omega t$, из (5.1) получаем соотношения

$$a \sin \omega t = \varepsilon;$$

$$a \cos \omega t = \frac{d(a \sin \omega t)}{\omega dt} = \frac{d\varepsilon}{\omega dt}.$$
(5.12)

Подставляя (5.12) в (5.11), получаем нужное нам выражение

$$u(t) \approx q(a)\varepsilon + q'(a)\frac{d\varepsilon}{\omega \cdot dt}$$
(5.13)

Можно выяснить, что для нечетной симметричной и однозначной нелинейной зависимости интеграл (5.9) равен нулю, то есть $q' = 0$.

Из (5.13) видно, что в установившемся режиме, когда амплитуда колебаний постоянная, зависимость выхода нелинейного звена от его входного сигнала линейная, но в целом такое представление сохраняет нелинейные свойства этого звена, так как q и q' являются функциями от амплитуды a , в общем случае нелинейными.

Представление характеристики нелинейного звена в виде (5.13) называется гармонической линеаризацией нелинейности, а величины q и q' называются коэффициентами гармонической линеаризации.

Таким образом, представление характеристики нелинейного звена в виде первой гармоники разложения его выходного сигнала в ряд Фурье называется гармонической линеаризацией нелинейности.

Коэффициенты разложения q и q' , зависящие от амплитуды входного сигнала, называются коэффициентами гармонической линеаризации.

Рассмотренная особенность гармонической линеаризации позволяет исследовать нелинейные системы с помощью частотных методов.

Для перехода в частотную область найдем изображение по Лапласу (5.13). Поскольку мы исследуем установившиеся колебательные режимы, когда амплитуда колебаний и параметры q и q' будут постоянными, то мы можем использовать такое преобразование. Тогда, выполнив преобразование по Лапласу (5.13), получаем

$$u(s) = q(a)\varepsilon(s) + q'(a)\frac{\varepsilon}{\omega} s(s) = \left(q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} s \right) \varepsilon(s). \quad (5.14)$$

Теперь определим передаточную функцию нелинейного звена

$$W_n(a, s) = \frac{u(s)}{\varepsilon(s)} = q(a) + q'(a) \frac{s}{\omega}. \quad (5.15)$$

Она, как и следовало ожидать, зависит от a .

Выражение (5.15) называется гармонически линеаризованной передаточной функцией нелинейного звена.

Подставляя в (5.15) вместо s $j\omega$, получаем амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФХ) нелинейного звена

$$W_n(a) = q(a) + jq'(a). \quad (5.16)$$

Из (5.16) следует, что АФХ в общем случае является комплексным выражением, но зависит только от амплитуды « a » входного сигнала и не зависит от его частоты ω .

Таким образом, АФХ нелинейного звена зависит только от амплитуды входного сигнала и не зависит от его частоты.

Аналогичные характеристики можно найти для несимметричных колебаний. Они возникают в случае, если характеристика нелинейного звена несимметричная, а также, если задание ненулевое.